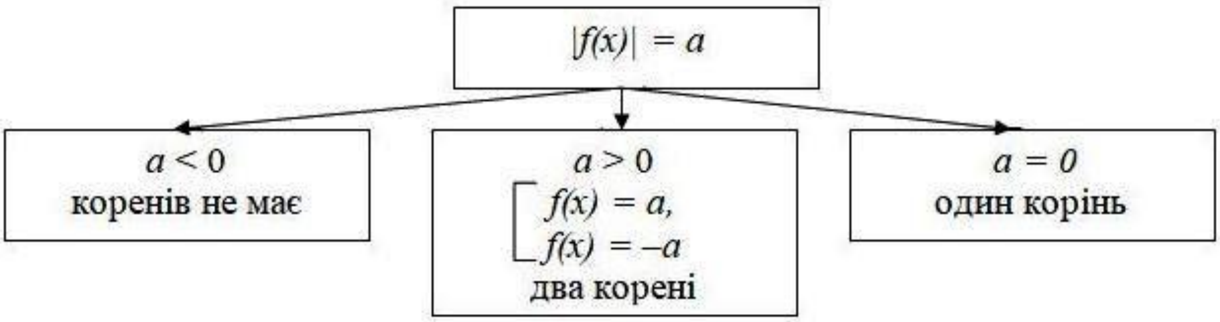
# З модулем на «ти»

Янковська Наталя Тимофіївна, вчитель математики Огульцівської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів Валківської районної ради Харківської області, вчитель вищої категорії, звання «Старший вчитель»

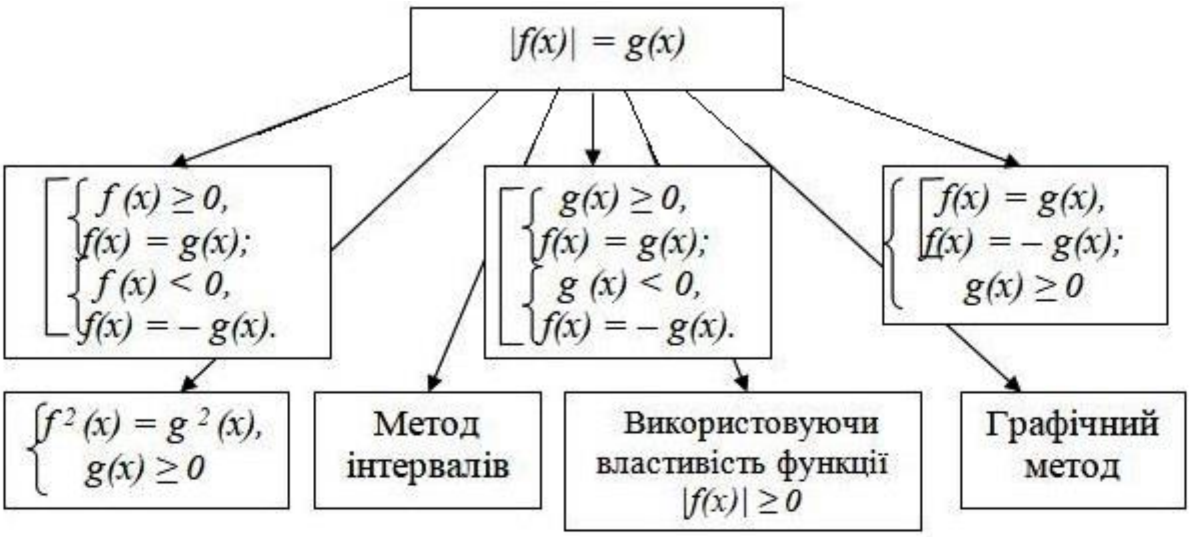
В курсі математики основної школи розв'язуються рівняння лінійні, квадратні, дробово-раціональні, тому я і зупинюся на дослідженні цих видів рівнянь з модулями.

Ідея розв'язання рівнянь з модулями полягає в тому, щоб звільнитися від них і перейти до рівнянь, які не містять модулів, і розв'язувати вже відомим способом.

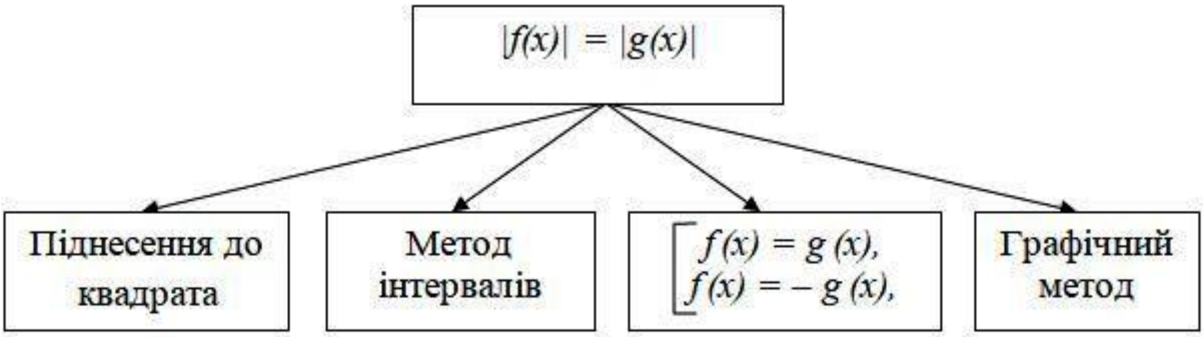
Кількість коренів рівняння $|f(x)| = a$ в залежності від значення числа $a$.




Рівняння виду $|f(x)| = g(x)$ можна теж розв'язувати кількома методами:



Для рівнянь виду $|f(x)| = |g(x)|$ раціональними є такі методи розв’язування:




**Розв’язування лінійних рівнянь з модулями**

**Приклад 1.** $|x - 3| = 2$ (один модуль дорівнює числу)

Розв’язання

*Метод 1* (за означенням модуля числа)

Модуль числа дорівнює 2 тоді і лише тоді, коли це число дорівнює 2 або – 2.

Отже, $x - 3 = 2$ або $x - 3 = -2$

$x = 5$ $\qquad$ $x = 1$

Відповідь: 1; 5.

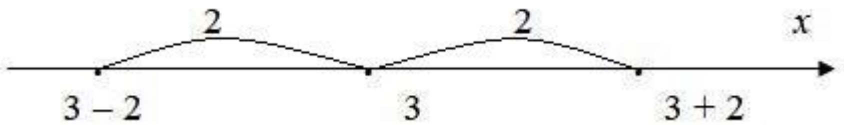
*Метод 2* (використовуючи алгебраїчний зміст модуля числа)

$|x - 3| = 2$ рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} x - 3 = 2, \\ x - 3 = -2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

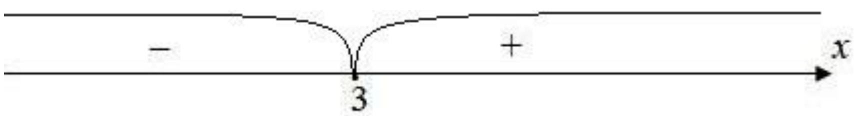
Відповідь: 1; 5.

*Метод 3* (використовуючи геометричний зміст модуля числа)




Відповідь: 1; 5.

*Метод 4.* Метод інтервалів




1) Знаходимо нуль модуля: $x - 3 = 0$, $x = 3$.

2) Область допустимих значень змінної розбилася на два інтервали знакосталості: $(-\infty; 3)$ і $(3; +\infty)$.

3) На кожному з цих інтервалів розв'язуємо рівняння без знака модуля.

а) Якщо $x \in (-\infty; 3)$, тоді $-(x-3) = 2$, $-x + 3 = 2$, $-x = 2 - 3$, $x = 1$.

б) Якщо $x \in [3; +\infty)$, тоді $x - 3 = 2$, $x = 3 + 2$, $x = 5$.

4) Об'єднання коренів, знайдених на цих інтервалах знакосталості і є розв'язками даного рівняння.

Відповідь: 1; 5.

*Метод 5.* Метод піднесення до квадрату

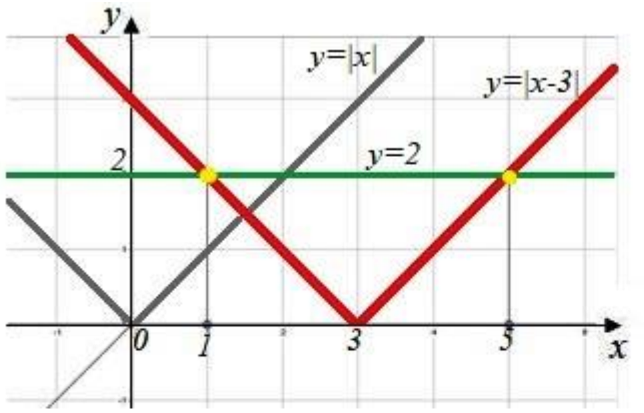
Підносимо до квадрату ліву і праву частини рівняння.

$|x-3|^2 = 2^2$, $(x-3)^2 = 2^2$, $x^2-6x+9=4$, $x^2-6x+5=0$, за теоремою Вієта $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Відповідь: 1; 5.

Метод 6. Графічний метод.

1) Будуємо графіки лівої та правої частин рівняння в одній системі координат.
2) Знаходимо точки перетину обох графіків.




3) Абсциси точок перетину і є коренями рівняння.

Отже, для розв'язування одного і того ж лінійного рівняння з модулем використано 6 різних методів розв'язання. Як видно, всі методи рівносильні, оскільки дають один і той самий результат. Тобто, вибирати метод можна за бажанням.

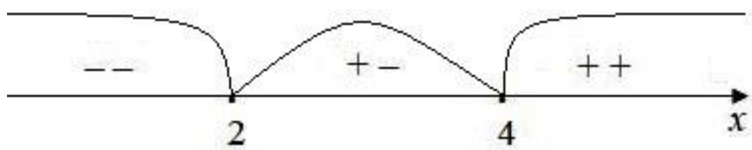
**Приклад 2.** $|x-2| + |x-4| = 3$ (сума модулів дорівнює числу)

Розв'язання

Рівняння має два модулі, тому раціонально його розв'язувати методом інтервалів.

1) Знаходимо нулі модулів: $x - 2 = 0$, $x = 2$; $x - 4 = 0$, $x = 4$.

2) Область допустимих значень змінної розбилася на три інтервали знакосталості: $(-\infty; 2)$, $(2; 4)$ і $(4; +\infty)$.



Перший знак на кожному інтервалі – це знак, з яким розкривається перший модуль, а другий знак – другий модуль.

3) На кожному з цих інтервалів розв'язуємо рівняння без знака модуля.

а) Якщо $x \in (-\infty; 2)$, тоді $-(x-2)+(-(x-4))=3$, $-x+2-x+4=3$, $-2x+6=3$, $-2x=3-6$, $-2x=-3$, $x=1{,}5$ $x \in (-\infty; 2)$

б) Якщо $x \in [2; 4)$, тоді $x-2+(-(x-4))=3$, $x-2-x+4=3$, $0x+2=3$, $0x=1$ – коренів не має.

в) Якщо $x \in [4; +\infty)$, тоді $x-2+x-4=3$, $2x-6=3$, $2x=9$, $x=4{,}5$ $x \in (4; \infty)$.

4) Об'єднання коренів, знайдених на цих інтервалах знакосталості і є коренями даного рівняння.

Відповідь: 1,5; 4,5.

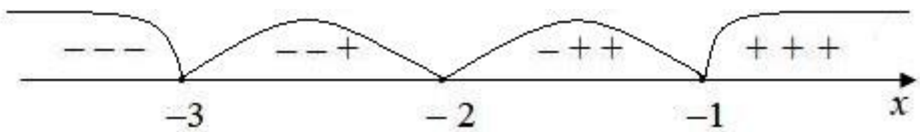
**Приклад 3.** $|x+1|+|x+2|=|x+3|+2$ (модулі в обох частинах)

В цьому рівнянні модулі є і в лівій і в правій частинах рівняння, тому запишемо рівняння у вигляді: $|x+1|+|x+2|-|x+3|=2$.

У такому вигляді рівняння нагадує попереднє (приклад 2). Тому й розв'язувати його раціонально також методом інтервалів.

1) Знаходимо нулі модулів: $x=-1$, $x=-2$; $x=-3$.

2) Область допустимих значень змінної розбилася точками $-3$, $-2$ і $-1$ на чотири інтервали знакосталості: $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$, $(-2; -1)$ і $(-1; +\infty)$.




3) На кожному з цих інтервалів розв'язуємо рівняння без знака модуля.

а) Якщо $x \in (-\infty; -3)$, тоді $-(x+1)-(x+2)-(-(x+3))=2$,
$-x-1-x-2+x+3=2$, $-x=2$, $x=-2$ – не входить до інтервалу $(-\infty; -3)$, тому не є розв'язком рівняння.

б) Якщо $x \in [-3; -2)$, тоді $-(x+1)-(x+2)-(x+3)=2$, $-x-1-x-2-x-3=2$, $-3x=8$, $x=-\frac{8}{3}$, $x=-2\frac{2}{3}$ $\in (-3; -2)$.

в) Якщо $x \in [-2;-1)$, тоді $-(x+1)+(x+2)-(x+3)=2$, $-x-1+x+2-x-3=2$, $-x=4$, $x=-4$ – не належить до інтервалу $(-2; -1)$.

г) Якщо $x \in [-1;+\infty)$, тоді $x+1+x+2-(x+3)=2$, $x+1+x+2-x-3=2$, $x=2$ $\in (-1; +\infty)$.

4) Об’єднання коренів, знайдених на цих інтервалах знакосталості і є розв’язками даного рівняння.

Відповідь: $-2\frac{2}{3}$; 2.

**Приклад 4.** $|x-1| = x+1$ (модуль дорівнює функції)

Розв’язання

Розв’язуємо рівняння методом піднесення до квадрату

$|x-1| = x+1$ рівносильне системі: $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ |x-1|^2 = (x+1)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -1, \\ -2x = 2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1, \\ x = 0; \end{cases}$ $x = 0.$ Відповідь: 0.

**Приклад 5.** $|x+5| = 2x-4$ (модуль дорівнює функції)

Розв’язання.

*Метод 1*(піднесення до квадрата)

$|x+5| = 2x-4$ рівносильне системі: $\begin{cases} 2x-4 \geq 0, \\ |x+5|^2 = (2x-4)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 + 10x + 25 = 4x^2 - 16x + 16; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 2, \\ 3x^2 - 26x - 9 = 0. \end{cases}$

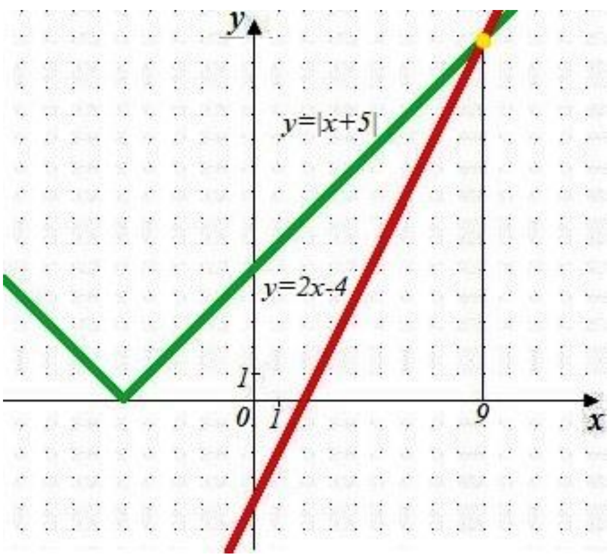
Далі слід розв’язати квадратне рівняння. $D = (-26)^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 784 = 28^2$

$x_{1,2} = \frac{26 \pm 28}{6}$, $x_1 = -\frac{1}{3}$ – не задовольняє умову $x \geq 2$, $x_2 = 9$.

Розв’язком системи є число 9.

Відповідь: 9.

*Метод 2* (графічний метод)




Будуємо графіки функцій, що стоять у лівій і правій частинах рівняння в одній системі координат. Абсциси точок перетину цих графіків і є коренями рівняння.

Відповідь: 9.

Можна зробити висновок, що доцільно підносити ліву і праву частини рівняння до квадрату, якщо коефіцієнти при x в обох частинах рівняння рівні за модулем. В цьому випадку доданки, що містять $x^2$, скоротяться, і далі розв'язується лінійне рівняння.

Якщо коефіцієнти при $x$ в обох частинах рівняння за модулем різні, то теж можна підносити до квадрата, але дістанемо квадратне рівняння. На мою думку, такі рівняння раціонально розв'язувати графічним методом.

Вибір методу розв'язання є справою смаку.

**Приклад 6.** $|2x–3| = |2x+7|$ (модуль дорівнює модулю)

Розв'язання

Це рівняння раціонально розв'язувати методом піднесення до квадрату, бо коефіцієнти при х у лівій і правій частинах рівняння рівні за модулем і доданки, що містять $x^2$, скоротяться.

$|2x–3|^2 = |2x+7|^2$, $4x^2–12x+9 = 4x^2+28x+49$, $–12x+9 =28x+49$, $–40x =40$, $x= –1$.

Відповідь: – 1.

Зустрічаються рівняння, що містять суму модулів, але не виникає необхідності розглядати інтервалів знакосталості.

**Приклад 7.** $|x–3| + |2x–1| +|x+7|= –2$.

Розв'язання

Рівняння не має коренів, оскільки зліва – сума модулів, яка є числом додатним, а додатне число не може дорівнювати від'ємному.

Відповідь: коренів немає.

## Розв'язування квадратних рівнянь з модулями

**Приклад 1.** $|x^2 –2x–7| = 4$ (модуль дорівнює числу)

Розв'язання

Оскільки права частина рівняння – додатне число, то раціональним методом є використання означення модуля числа. Отже, $|x^2 –2x–7| = 4$ рівносильне

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x-7=4, \\ x^2-2x-7=-4; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2-2x-11=0, \\ x^2-2x-3=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=1\pm2\sqrt{3}, \\ x=3,\ x=-1. \end{array}\right.$$

Корені першого рівняння визначити через дискримінант, а другого – за теоремою Вієта.

Відповідь: $1–2\sqrt{3}$; $–1$; $3$; $1+2\sqrt{3}$.

**Приклад 2.** $|x^2 – 2x| = 3 – 2x$ (модуль дорівнює функції)

Розв'язання

$|x^2 – 2x| = 3 – 2x$ рівносильне системі:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-2x=3-2x,\\ x^2-2x=-(3-2x),\end{array}\right.\\ 3-2x\geq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2=3,\\ x^2-4x+3=0,\end{array}\right.\\ -2x\geq -3;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{3},\\ x=1, x=3,\end{array}\right.\\ x\leq 1{,}5;\end{cases}\quad x=-\sqrt{3}, x=1.$$

Відповідь: $-\sqrt{3}$, 1.

**Приклад 3.** $x^2 + |x–2| + |x|+|x+2| +|x–3|+|x+3| – 4 = 0$

Розв'язання

Запишемо рівняння у вигляді: $|x–2| +|x|+ |x+2| +|x–3|+|x+3| = 4 – x^2$.

Ліва частина рівняння додатна, отже, рівняння матиме корені при $4 – x^2 \geq 0$, тобто при $x \in [–2, 2]$.

Доведемо, що в лівій частині рівняння парна функція:

$f(–x) = |–x–2| + |–x|+|–x+2| +|–x–3|+|–x+3| = |–(x+2)| + |–(x–2)| +|–(x+3)|+|–(x–3)|=$
$= |x+2| + |x|+|x–2| +|x+3|+|x–3| = f(x)$.

Оскільки в рівнянні в лівій частині парна функція, то якщо $x_0$ – корінь даного рівняння, тоді і $– x_0$ – теж корінь рівняння і достатньо знайти корені даного рівняння на додатній частині області визначення, тобто на [0; 2] і до розв'язків приєднати корені, протилежні за знаком до знайдених.

Враховуючи знаки модулів на цьому відрізку, маємо рівняння:

$x^2 –x+2 +x+ x+2 –x+3+x+3 – 4 = 0$, $x^2 +x+6 = 0$ – розв'язків немає.

Відповідь: розв'язків немає.

**Приклад 4.** $1+ |x^2+7x| = \sqrt{1-x^2}$

Розв'язання

Знайдемо область допустимих значень рівняння: $1–x^2 \geq 0$, $x\leq 1$ або $x \in [–1;1]$

Використовуючи властивості функцій, можна зробити висновок, що ліва частина $1+ |x^2+7x| \geq 1$, а права частина $\sqrt{1-x^2} \leq 1$.

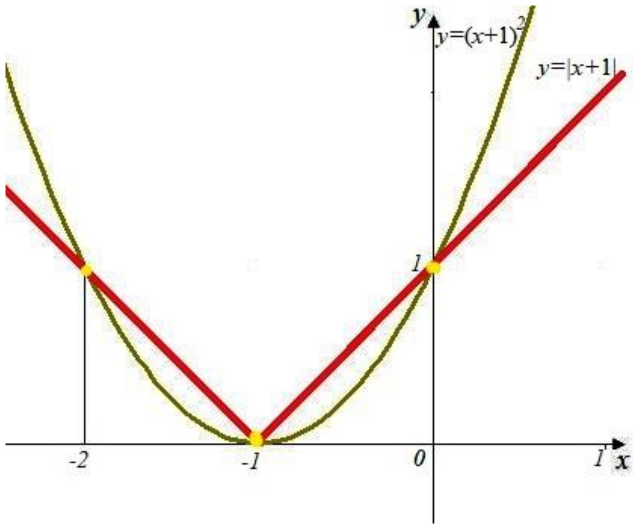
$$\begin{cases}1+|x^2+7x|=1,\\ \sqrt{1-x^2}=1;\end{cases}\quad x = 0.$$

Відповідь: 0.

**Приклад 5.** $|x+1| = (x+1)^2$ (модуль дорівнює функції)

Розв'язання

Розв'яжемо графічним методом. Будуємо в одній системі координат графіки функцій $y_1 = |x+1|$, $y_2 = (x+1)^2$. Абсциси точок перетину є коренями даного рівняння: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.




Відповідь: –2; – 1; 0.

**Приклад 6.** $|3x-4| = 4x^2+3x-2$

Розв'язання

$|3x-4| = 4x^2+3x-2$ рівносильне

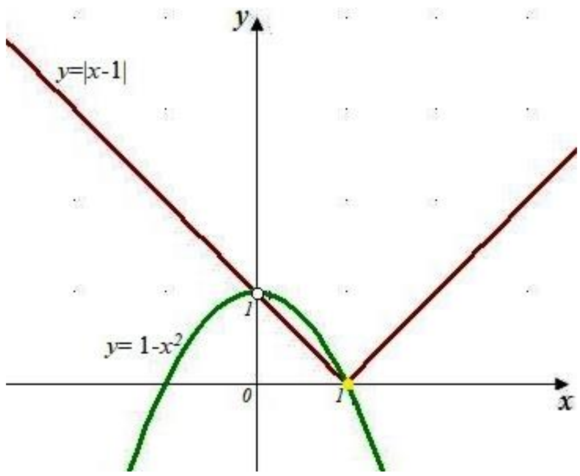
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-4=4x^2+3x-2,\\ 3x-4\geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}3x-4=4x^2+3x-2,\\ 3x-4<0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x^2+2=0,\\ 3x\geq 4;\end{cases}\\ \begin{cases}4x^2+6x-6=0,\\ 3x<4;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2+1=0,\\ x\geq \frac{4}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2+3x-3=0,\\ x<\frac{4}{3};\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\text{коренів нема}\\ x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{4}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$.

**Приклад 7.** $|x-1| + x^2 = x^0$

Розв'язання

Знайдемо ОДЗ рівняння: $x \neq 0$, бо $0^0$ – невизначеність. Враховуючи, що $x^0 = 1$, отримуємо рівняння: $|x-1|+x^2 = 1$ та запишемо його у вигляді $|x-1| = 1-x^2$ й розв'яжемо його графічно.




Графіки $y = |x-1|$, $y = 1-x^2$ перетинаються в двох точках, абсциси яких 0 і 1, але 0 не ходить в область визначення, тому корінь – лише один: $x = 1$.

Відповідь: 1.

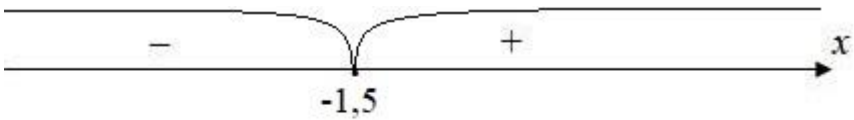
## Розв'язування дробово-раціональних рівнянь з модулем

Щоб розв'язати дробово-раціональне рівняння з модулем, спочатку необхідно знайти ОДЗ рівняння, потім записати рівняння без знаменника і застосувати один із методів для «розкриття» знака модуля, а далі розв'язувати лінійне чи квадратне рівняння.

**Приклад 1.** $\frac{|2x+3|}{x-5}=1$

Розв'язання

1) Знайдемо ОДЗ даного рівняння: $x \neq 5$.
2) Знайдемо нуль функції: $2x+3 = 0$, $x = -1{,}5$.
3) ОДЗ розіб'ється на два інтервали знакосталості:




4) Якщо $x \in (-\infty; -1{,}5)$, $\frac{-2x-3}{x-5}=1$, $-2x-3 = x-5$, $-3x = -2$, $x = \frac{2}{3}$ – не належить інтервалу $(-\infty; -1{,}5)$. $\varnothing$
5) Якщо $x \in [-1{,}5; +\infty)$, $\frac{2x+3}{x-5}=1$ , $2x + 3 = x - 5$, $x = -8$ – не належить інтервалу $[-1{,}5; +\infty)$, $\varnothing$

Відповідь: коренів нема.

**Приклад 2.** $\frac{|2x-6|}{x-7}=5$

Розв'язання

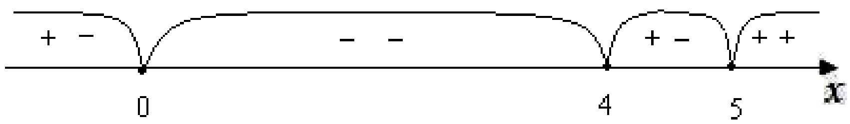
Це рівняння можна розв'язувати як попереднє, тобто записати рівняння у вигляді $|2x - 6| = 5x - 7$ і далі розв'язувати методом інтервалів. А можна розглянути інший метод, коли дане рівняння рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{2x-6}{x-7}=5,\\ 2x \geq 6;\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{2x-6}{x-7}=-5,\\ 2x < 6;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 3, x \neq 7,\\ 2x-6=5x-35;\end{cases}\\ \begin{cases}x<3, x \neq 7,\\ 2x-6=-5x+35;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 3, x \neq 7,\\ -3x=-29;\end{cases}\\ \begin{cases}x<3, x \neq 7,\\ 7x=41;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 3, x \neq 7,\\ x=\frac{29}{3}; \quad x=9\frac{2}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}x<3, x \neq 7,\\ x=\frac{41}{7}; \quad \varnothing\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $9\frac{2}{3}$.

**Приклад 3.** Розв’язати рівняння $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$.

Оскільки $x^2 \geq 0$ і $|x-5| \geq 0$ при всіх дійсних $x$, причому вирази $x^2$ і $|x-5|$ одночасно не перетворюються в нуль, то $x^2+|x+5|>0$ при всіх $x \in R$. Тому ОДЗ рівняння є множина всіх дійсних чисел і вихідне рівняння рівносильне такому: $|x^2 - 4x| +3 = x^2 +| x + 5|$. Вираз $x^2-4x$ перетворюється в нуль у точках $x$=0 і $x$=4, а вираз $x$ – 5 у точці $x$ = 5. На малюнку на кожному інтервалі знакосталості першим відзначено знак виразу $x^2-4x$, а другим – знак виразу $x$ – 5.




Враховуючи, що на інтервалах $(-\infty;0)$, $(4;5)$ послідовність знаків виразів $x^2-4x$ і $x$ – 5 співпадає, розглянемо такі випадки.

1) $x \in (-\infty;0) \cup [4;5)$. На цій множині матимемо: $x^2 - 4x + 3 = x^2 - x + 5$, $-3x= 2$, $x=-\frac{2}{3}$. Оскільки $-\frac{2}{3} \in (-\infty;0) \cup (4;5)$, то $x=-\frac{2}{3}$ – корінь рівняння

2) $x \in [0;4)$. Розкривши модулі, отримаємо рівняння $-x^2+4x+3=x^2-x+5$, яке має два корені: $\frac{1}{2}$ і $2$. Числа $\frac{1}{2}$ і $2$ є коренями рівняння.

3) $x \in [5;\infty)$. На цьому проміжку: $x^2 - 4x + 3 = x^2 + x - 5$, $-5x = -8$, $x = \frac{8}{5}$. Оскільки $\frac{8}{5} \notin [5;\infty)$, то $x=\frac{8}{5}$ – не є коренем рівняння.

Отже, коренями рівняння є: $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2.

Відповідь. $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2.

**Приклад 4.** $\frac{|x^2-x-2|}{x+1}=3$

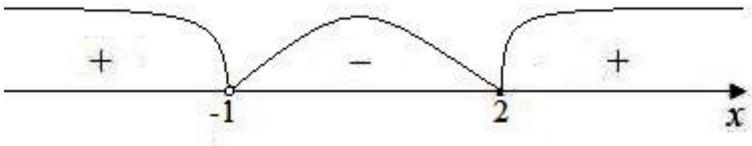
Розв’язання

Знайдемо ОДЗ даного рівняння: $x \neq -1$.

$\frac{|x^2-x-2|}{x+1}=3$ рівносильне $|x^2-x-2| = 3(x+1)$, яке розв’яжемо методом інтервалів.

1) Знайдемо нулі модуля: $x^2 - x - 2 = 0$, $x = -1$; $x = 2$.

2) ОДЗ розіб'ється на три інтервали знакосталості:




Якщо $x \in (-\infty; -1)$, рівняння має такий вигляд: $x^2 - x - 2 = 3x + 3$,
$x^2 - 4x - 5 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 5$ – не належать $(-\infty; -1)$.

3) Якщо $x \in (-1; 2)$, то маємо $-x^2 + x + 2 = 3x + 3$, $x^2 + 2x + 1 = 0$ – розв'язків не має ($D<0$).

4) Якщо $x \in [2; +\infty)$, розв'язуємо рівняння $x^2 - x - 2 = 3x + 3$, $x_1 = -1$ – не належить $[2; +\infty)$ ,– належить $[2; +\infty)$.

Отже, маємо лише один корінь: $x = 5$

Відповідь: 5.

**Приклад 5.** $x^2 - 5x\dfrac{|x-2|}{x-2} - 14 = 0$

Розв'язання

Знайдемо ОДЗ даного рівняння: $x \neq 2$. Рівняння рівносильне

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2 - 5x\dfrac{x-2}{x-2} - 14 = 0, \\ x - 2 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 5x\dfrac{x-2}{x-2} - 14 = 0, \\ x - 2 < 0; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2 - 5x - 14 = 0, \\ x > 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 5x - 14 = 0, \\ x < 2; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x_1 = -2,\ x_2 = 7, \\ x > 2; \end{cases} \quad x = 7, \\ \begin{cases} x_1 = -7,\ x_2 = 2, \\ x < 2; \end{cases} \quad x = -7. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\pm 7$.

## Розв'язування рівнянь з параметром, що містять модуль

**Приклад 1.** Побудуйте графік функції $y = |x^2 - 4|$. Використовуючи графік, знайдіть усі $a$, при яких рівняння $|x^2 - 4| = a$ має рівно три корені.

Розв'язання

Будуємо графік функції $y = |x^2 - 4|$.

1) $y_1 = x^2$

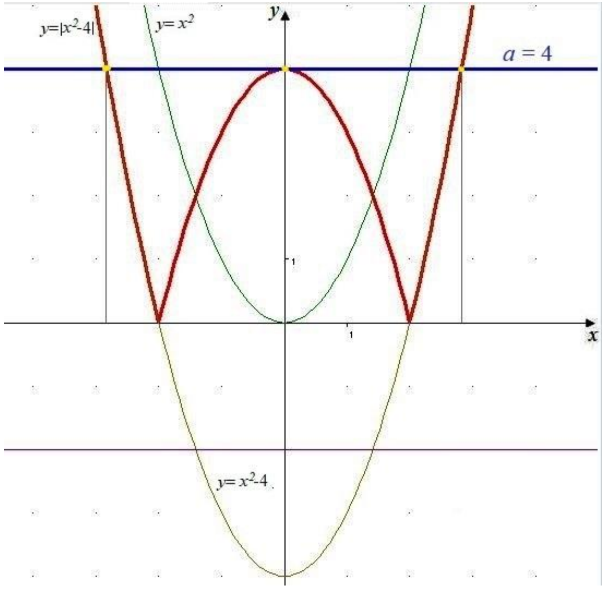
2) $y_2 = x^2 - 4$

3) $y_3 = |x^2 - 4|$.

Рівняння $|x^2 - 4| = a$ розв'яжемо графічно, для цього ще побудуємо пряму $y_4 = a$ – пряма, паралельна осі OX. При значенні $a = 4$ буде три точки перетину прямої з графіком функції $y = |x^2 - 4|$.

Отже, при $a = 4$ маємо рівно три корені.

Відповідь: 4.

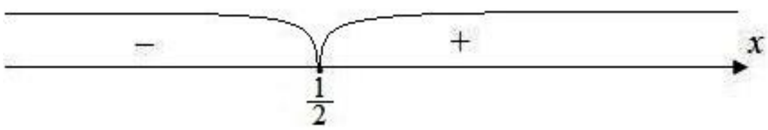



**Приклад 2.** Розв'язати рівняння $x^2 - |2x - 1| = a$

Розв'язання

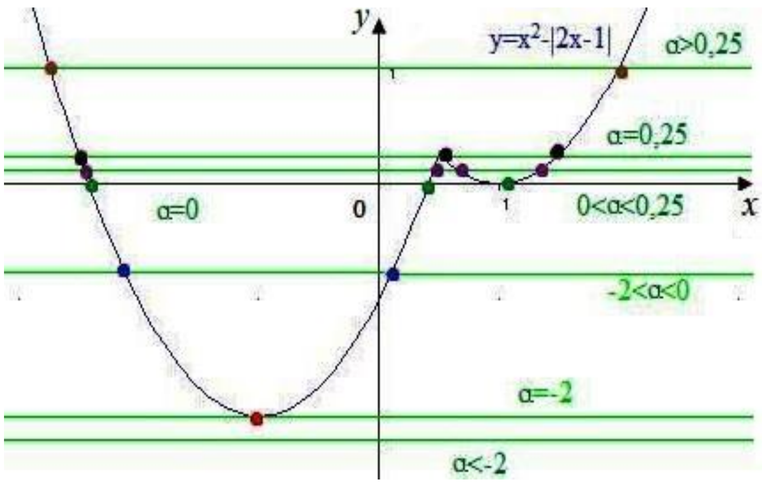
1. ОДЗ: $x \in (-\infty; \infty)$, $a \in (-\infty; \infty)$

Знайдемо нуль модуля: $x = \frac{1}{2}$




Якщо $x \geq \frac{1}{2}$, тоді $a = x^2 - 2x + 1$, або якщо $x < \frac{1}{2}$, тоді $a = x^2 + 2x - 1$.

2. В системі координат XOA будуємо графіки функцій $a = (x-1)^2$, якщо $x \geq \frac{1}{2}$ і $a = (x+1)^2 - 2$, якщо $x < \frac{1}{2}$

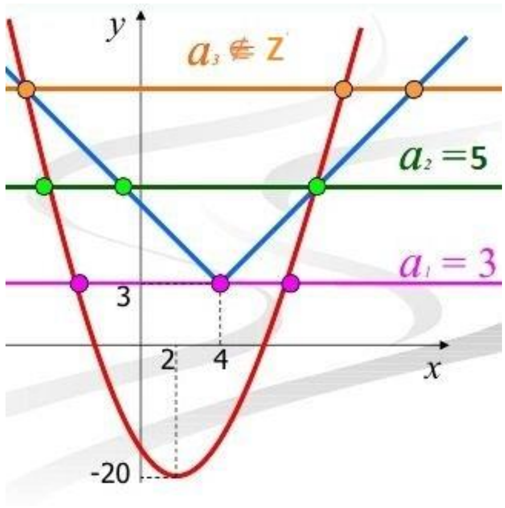



Якщо $a < -2$, то графіки не перетинаються, отже рівняння не має коренів; якщо $a = -2$, то графіки перетинаються в одній точці з абсцисою $x = -1$; якщо $-2 < a < 0$, тоді дві точки перетину, абсциси яких $x_{1,2} = -1 \mp \sqrt{a+2}$;

якщо $a > 0{,}25$, тоді дві точки перетину, абсциси яких $x_1 = -1 - \sqrt{a+2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{a}$; якщо $a = 0$, то маємо 3 точки перетину: $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -1 \mp \sqrt{2}$; якщо $0 < a < 0{,}25$, тоді пряма перетинає графік заданої функції в 4 точках $x_{1,2} = -1 \mp \sqrt{a+2}$, $x_{3,4} = 1 \mp \sqrt{a}$; якщо $a = 0.25$, тоді $x_1 = 1 - \sqrt{a+2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1 + \sqrt{a}$.

Відповідь: не має коренів, якщо $a\in(-\infty;-2)$; –1, якщо $a$=–2; $-1\mp\sqrt{a+2}$, якщо $a\in(-2;0)$; $-1\mp\sqrt{2}$ та 1, якщо $a$=0; $-1\mp\sqrt{a+2}$ та $1\mp\sqrt{a}$, якщо $a\in(0;0{,}25)$; $-1-\sqrt{a+2}$, $\frac{1}{2}$, $1+\sqrt{a}$, якщо $a$=0,25; $-1-\sqrt{a+2}$, $1+\sqrt{a}$, якщо $a\in(0{,}25;\infty)$

**Приклад 3**. Знайти суму цілих значень параметра а при яких рівняння $(a+2x-x^2+19)(a-3-|x-4|)=0$ має три корені.




Розв'язання

Дане рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} a-x^2+2x+19=0, \\ a-3-|x-4|=0. \end{array}\right.$$

Виразивши параметр а, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l} a=x^2-2x-19, \\ a=|x-4|+3. \end{array}\right.$$

Рівняння має три корені у випадках:

1. Якщо $a$ =3;

2. Якщо $x<4$, $x^2-2x+19=-(x-4)+3$, $x^2-x-26=0$, $x_{1,2}\overline{\in}Z$, коренів нема.

3. Якщо $x>4$, $x^2-2x+19=x-4+3$, $x^2-3x-18=0$, $x_1=-3$, $x_2=6$

Тоді а=6 – 4+3=5. Отже, 3+5=8

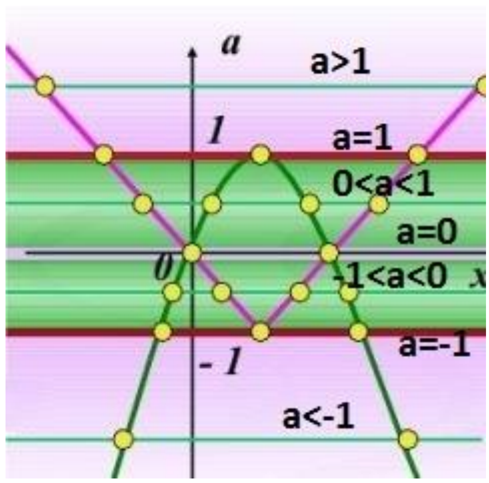
Відповідь: 8

**Приклад 4**. Скільки розв'язків має рівняння $(a-2x+x^2)(a+1-|x-1|)=0$ в залежності від параметра а?

Розв'язання

Дане рівняння рівносильне сукупності двох рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} a=2x-x^2, \\ a=|x-1|-1. \end{array}\right.$$




Графік сукупності – об'єднання графіків параболи та ламаної. Використовуючи рисунок, визначаємо: якщо $a<-1$ і $a>1$, то 2 розв'язки: якщо $a=\mp1$, то 3 розв'язки; якщо $-1<a<0$ і $0<a<1$, то 4 розв'язки.

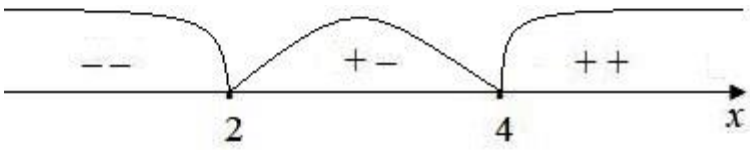
Відповідь: 2 розв'язки якщо

$a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$; 3 розв'язки якщо $a = \mp 1$; 4 розв'язки, якщо $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

**Приклад 5**. При якому значенні параметра *a* рівняння: $|x-2|+|x-4| = a$ має безліч розв'язків?

Розв'язання

Розв'яжемо графічним методом. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій, які є у лівій і правій частинах рівняння. Побудуємо графік функції $y = |x-2| + |x-4|$. Знайдемо нулі модулів: $x = 2$, $x = 4$.

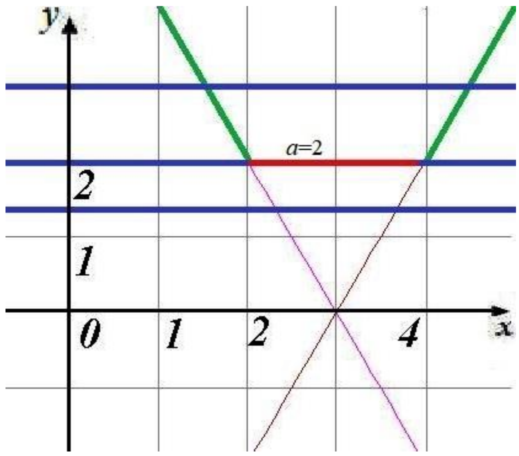



Ці точки розбивають область визначення на три інтервали.

1) Якщо $x \in (-\infty, 2)$, $y_1 = -x+2-x+4 = -2x+6$ – пряма.

2) Якщо $x \in [2; 4]$, $y_2 = x-2-x+4 = 2$ – пряма.

3) Якщо $x \in (4; +\infty)$, $y_3 = x-2+x-4 = 2x-6$ – пряма.




Побудуємо графік функції $y = a$. Це пряма, паралельна *OX*.

Графіки матимуть безліч точок перетинів, якщо a = 2.

Відповідь: при $a = 2$.

**Приклад 6**. $|x - a| = 3x - 1$

Розв'язання

Розв'яжемо рівняння, використовуючи означення модуля. Слід врахувати, що зліва невід'ємний вираз, тому й вираз справа теж невід'ємний. $|x - a| = 3a - 1$ рівносильне:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - a = 3x - 1, \\ 3x - 1 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x - a = -3x + 1, \\ 3x - 1 \geq 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1-a}{2}, \\ x \geq \dfrac{1}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{a+1}{4}, \\ x \geq \dfrac{1}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, $\dfrac{1-a}{2} \geq \dfrac{1}{3}$, $3 - 3a \geq 2$, $a \leq \dfrac{1}{3}$,

$\dfrac{a+1}{4} \geq \dfrac{1}{3}$, $3a + 3 \geq 4$, $a \geq \dfrac{1}{3}$.

Обчислимо корені при $a=\frac{1}{3}$: $x - a = 3x - 1$, $x - \frac{1}{3} = 3x - 1$, $x = \frac{1}{3}$;

$x - a = -3x + 1$, $x - \frac{1}{3} = -3x + 1$, $x = \frac{1}{3}$;

Відповідь: $\frac{1-a}{2}$, якщо $a < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$, якщо $a = \frac{1}{3}$; $\frac{a+1}{4}$, якщо $a > \frac{1}{3}$.

Висновки:

- розглянуті методи є спільними для всіх видів рівнянь, основним серед яких є метод інтервалів;
- рівняння, яке містить більше, ніж один модуль, доцільно розв'язувати методом інтервалів;
- рівняння, в лівій частині якого знаходиться парна функція, раціонально розв'язувати, використовуючи властивість парної функції;
- дробово-раціональне рівняння з модулем слід замінити рівносильним йому без знаменника, а потім застосувати один з методів для розкриття знака модуля, враховуючи належність коренів області допустимих значень;
- рівнянь виду $|f(x)|=g(x)$, на відміну від рівняння виду $|f(x)|=a$, слід розв'язувати, враховувати умову $g(x)\geq 0$, відсутність якої приводить до появи сторонніх коренів;
- рівняння з рівними за модулем коефіцієнтами при x в обох частинах доцільно розв'язувати піднесенням до квадрату лівої і правої частин, в цьому випадку доданки, що містять $x^2$, скоротяться, і далі розв'язується лінійне рівняння;
- рівняння з різними коефіцієнтами при x в обох частинах раціонально розв'язувати графічним методом, хоча теж можна підносити до квадрата, але доведеться розв'язувати квадратне рівняння;
- рівняння, які в лівій частині містять суму модулів, а в правій – від'ємне число, коренів не мають за властивістю модуля;
- рівняння з параметром, у лівій частині якого добуток виразів з модулями, а права дорівнює нулю, раціонально розв'язувати графічним методом;
- фактично всі рівняння раціонально розв'язувати графічним методом, особливо рівняння з модулями і параметрами, якщо володієш вмінням побудови

графіків, бо він наочний і дозволяє побачити як кількість коренів, так і самі корені.

Обираючи метод розв'язування рівнянь з модулями, слід враховувати складність рівносильних перетворень та побудови графіків.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вишенський В.О., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Задачі з математики. – К. : Вища школа, 1985. – 264 с.

2. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Радянська школа, 1991. – 224с.

3. Геворкян Ю.Л. Кізім Є.О., М'ясникова В.Ф., Чікіна Н.О. Збірник задач з математики з рішеннями. – Харків: Прапор, 1999. – 448 с. – (Серія «Для вступників до вузів»)

4. Головень О.А. Графічний метод. // Математика в школах України. – 2010. №34–36. – с 20–26.

5. Горштейн П.Н., Полонський В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – К.: Евро індекс Лтд, 1995. – 336с.

6. Жовнір Я.М., І.А.Наумов, Крамар В.С., Рябчинська В.Д. Учебные алгоритмы по алгебре и элементарным функциям. – Х.:ХДПІ. 1980. – 86 с.

7. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебраїчний тренажер. Посібник для школярів і абітурієнтів.–Харків:Гімназія, Ранок.–1998

8. Назаренко О.М., Назаренко Л.Д. Тисяча і один приклад. Рівності і нерівності. Посібник для абітурієнтів. – С.: Слобожанщина, 1994. – 272 с.

9. Рябчинська В.Д. Алгебра і початки аналізу: Навчальний посібник для 10–11 класів – Харків: ХДПУ, 1996, – 132 с.

10. Столипін А.В. Комплексные упражнения по математике с решениями. 7–11 классы. – Харьков: Рубікон, 1995. – 240 с.

11. Чекова А.М. Алгебра і початки аналізу в таблицях. 7-11 класи. Навч.посібник. Науково-методичний центр™, 2003. – 248 с.

12. Шкіль І.М., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: підручник для 11 класу загальноосвіт. авч. Закладів.–К.: Зодіак–ЕКО, 2006.